Analysis 1

Frühjahrssemester 2019 – Lecture Notes

Sven Pfiffner

Davos|Zürich Mai 19

Inhalt

[Ordnungsaxiome 1](#_Toc8812981)

[Lösung von Quadraten 1](#_Toc8812982)

[Archimedisches Axiom 2](#_Toc8812983)

[Obere- und untere Schranken 3](#_Toc8812984)

[Existenz von oberen-/unteren Schranken 3](#_Toc8812985)

[Kardinalität 4](#_Toc8812986)

[Der euklidische Raum 4](#_Toc8812987)

[Fundamentalsatz der Algebra 5](#_Toc8812988)

[Folgen 5](#_Toc8812989)

[Definition einer Folge 5](#_Toc8812990)

[Konvergenz von Folgen 5](#_Toc8812991)

[Monotonie 6](#_Toc8812992)

[Satz von Weierstrass 6](#_Toc8812993)

[Die Bernoulli Ungleichung 7](#_Toc8812994)

[Das Cauchy-Kriterium 7](#_Toc8812995)

[Limes superior/inferior 8](#_Toc8812996)

[Abgeschlossene Intervalle 8](#_Toc8812997)

[Bolzano-Weierstrass 9](#_Toc8812998)

[Abzählbarkeit von 9](#_Toc8812999)

[Reihen 10](#_Toc8813000)

[Reihenkonvergenz 10](#_Toc8813001)

[Leibniz-Kriterium 10](#_Toc8813002)

[Cauchy-Kriterium für Reihen 10](#_Toc8813003)

[Majoranten- und Minoranten-Kriterium 11](#_Toc8813004)

[Quotientenkriterium 11](#_Toc8813005)

[Wurzelkriterium 12](#_Toc8813006)

[Potenzreihen 13](#_Toc8813007)

[Konvergenz 13](#_Toc8813008)

[Doppelreihen 13](#_Toc8813009)

[Cauchy-Produkt der Reihen 13](#_Toc8813010)

[Reellwertige Funktionen 14](#_Toc8813011)

[Beschränktheit 14](#_Toc8813012)

[Stetige Funktionen 14](#_Toc8813013)

[Polynomialfunktion 15](#_Toc8813014)

[Zwischenwertsatz 16](#_Toc8813015)

[Min-Max Satz 16](#_Toc8813016)

[Der Satz über die Umkehrabbildung 17](#_Toc8813017)

[Exponentialfunktion 18](#_Toc8813018)

[Konvergenz von Funktionenfolgen 19](#_Toc8813019)

[Eulers und die Trigonometrischen Funktionen 20](#_Toc8813020)

[Definition der Exponentialfunktion 20](#_Toc8813021)

[Der natürliche Logarithmus 22](#_Toc8813022)

[Die Trigonometrischen Funktionen 22](#_Toc8813023)

[Die Kreiszahl 23](#_Toc8813024)

[Differenzialrechnung 24](#_Toc8813025)

[Ableitung 24](#_Toc8813026)

[Ableitungsregeln 27](#_Toc8813027)

[Produktregel 27](#_Toc8813028)

[Kettenregel 27](#_Toc8813029)

[Kehrwertregel 28](#_Toc8813030)

[Quotientenregel 28](#_Toc8813031)

[Winkelfunktionen 29](#_Toc8813032)

[Zentrale Sätze über die erste Ableitung 30](#_Toc8813033)

[Regel von Bernoulli – De l’Hospital 32](#_Toc8813034)

[Satz von Rolle 32](#_Toc8813035)

[Formel von Lagrange 33](#_Toc8813036)

[Höhere Ableitungen 34](#_Toc8813037)

[Potenzreihen und Tayler Approximation 34](#_Toc8813038)

# Ordnungsaxiome

Im Raum der Reellen Zahlen gelten folgende, sogenannte Ordnungsaxiome

ist ein kommutativer Körper und Ordnungsvollständig. Das heisst, dass gilt: . Das liegt an der Abzählbarkeit von . ist eine überabzählbare Menge und damit gibt es unendlich viele Zahlen zwischen und damit auch immer mindestens ein

Seien Teilmengen von , so dass und , dann gibt es auf jeden Fall ein

# Lösung von Quadraten

Für jedes in hat die Gleichung eine Lösung in , nämlich .

**Beweis:**

Sei und

* (Archimedes)

Es gibt also nach der Ordnungsvollständigkeit auf jeden Fall ein mit   
. Wir zeigen nun, dass und und damit dann .

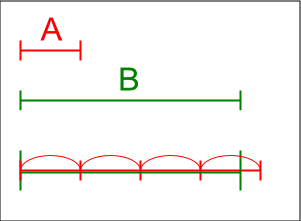
: Wir nehmen an, . Damit wäre nach unserer Definition . Weil und gilt nach Archimedes: .

Dies zeigt, dass . Mit also   
 was ein Wiederspruch wäre

????????????????

# Archimedisches Axiom

Sei mit und , dann gibt es ein , mit



Die Bedeutung des archimedischen Axioms wird klar, wenn wir seine Aussage negieren. Aus wird . Damit wäre eine in Relation zu unendlich grosse Zahl (Jedes Vielfache von ist kleiner als ). Folgende zwei Aussagen folgen aus dem Archimedischen Axiom

* Es gibt keine zwei Zahlen und , so dass in Relation zu unendlich gross ist.
* Es gibt keine positiven unendlich kleinen oder unendlich grossen reellen Zahlen.

**Widerspruchsbeweis:**

Sei . Wir zeigen, dass es auf jeden Fall ein gibt, so dass .

Angenommen . Wir finden einen Widerspruch:

Sei und dann gilt und nach den Ordnungsaxiomen ausserdem .

# Obere- und untere Schranken

Die obere Schranke einer Teilmenge von ist ein Element, welches nach der Ordnungsrelation grösser oder gleich aller Elemente in ist. Die kleinste obere Schranke (Supremum) von ist das nach der Ordnungsrelation kleinste Element in der Menge aller oberer Schranken von . Analog dazu sind die untere Schranke und grösste untere Schranke (Infimum) definiert.

## Existenz von oberen-/unteren Schranken

Sei

1. Sei nach oben beschränkt, dann gibt es immer eine kleinste obere Schranke.
2. Sei nach unten beschränkt, dann gibt es immer eine grösste untere Schranke.

**Beweis:**

1. Sei die Menge der oberen Schranken von . Wir wissen nach Def. dass . Nun gilt aber auch . Nach Ordnungsvollständigkeitsaxiom wissen wir nun, dass und damit existiert mit immer eine kleinste obere Schranke
2. Sei die Menge der unteren Schranken von . Wir wissen nach Def. dass . Nun gilt aber auch . Nach Ordnungsvollständigkeitsaxiom wissen wir nun, dass und damit existiert mit immer eine grösste untere Schranke.

Wir definieren die Schranken von nicht beschränkten Mengen wie folgt:

Jede Zahl in erfüllt und ist damit obere Schranke von

# Kardinalität

Zwei Mengen heissen gleichmächtig, falls es eine Bijektion gibt. Ist eine Menge endlich, so gilt entweder oder . Eine Menge ist abzählbar falls gilt: .

# Der euklidische Raum

Folgende wichtige Eigenschaften gelten im euklidischen Raum

1. Skalarprodukt:
2. Euklidische Norm:
3. Cauchy-Schwarz:
4. Dreiecksungleichung:

**Beweis zu 4):**

Nun gilt aber nach Cauchy-Schwarz

woraus folgt:

# Fundamentalsatz der Algebra

Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass jedes nicht konstante Polynom in mindestens eine Nullstelle besitzt. Das bedeutet, dass die komplexen Zahlen algebraisch abgeschlossen sind.

Beachte: Der Beweis dieser Aussage gilt als sehr schwierig und ist nicht Gegenstand der Vorlesung «Analysis 1»!

# Folgen

## Definition einer Folge

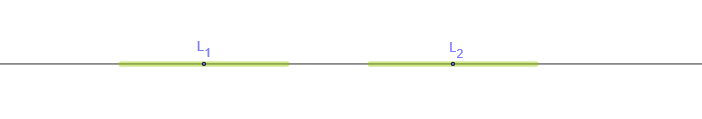
Eine Folge ist eine Abbildung . Wir führen folgende Notationen ein:

Sei eine Folge. Dann gibt es höchstens eine reelle Zahl mit der Eigenschaft, dass die Menge endlich ist.

Widerspruchsbeweis:

Wir nehmen an, es gäbe , welche beide die obige Eigenschaft erfüllen. Wir wählen nun eine bestimmtes (die Eigenschaft gilt ) und stossen so auf einen Wiederspruch!

Sei . Wir sehen bei Betrachtung des Zahlenstrahls, dass dadurch zwei disjunkte Mengen entstehen:



Nach Voraussetzung gilt:

Da nun aber und voneinander disjunkt sind, können wir schlussfolgern, dass und damit wäre die Kardinalität von nicht endlich.

## Konvergenz von Folgen

Eine Folge heisst konvergent, falls ein existiert, so dass die Menge von endlicher Kardinalität ist. Wir definieren dann .

Jede konvergente Folge ist beschränkt. Sei konvergent mit Grenzwert . Dann ist beschränkt.

### Monotonie

1. ist monoton fallend, falls
2. ist monoton wachsend, falls

### Satz von Weierstrass

Sei monoton wachsend und nach oben beschränkt, so konvergiert mit Grenzwert .

Sei monoton fallend und nach unten beschränkt, so konvergiert mit Grenzwert .

Beweis:

Sei und . Demzufolge gibt es ein , so dass und daraus folgt :

Beweis für verläuft analog.

Im Allgemeinen können wir nun die Definition eines Häufungspunkts einführen. Wir sagen sei ein Häufungspunkt der beschränkten Folge , wenn für unendlich viele gilt, dass . Es ist leicht zu erkennen, dass jede beschränkte Folge zwangsweise mindestens einen Häufungspunkt besitzen muss. Es gilt ausserdem:

Sei monoton wachsend und beschränkt, so besitzt genau einen Häufungspunkt.

**Beispiel:**

Wir betrachten . Offensichtlich liegen alle Glieder von im Intervall und damit ist die Folge beschränkt; muss also nach Weierstrass mindestens einen Häufungspunkt besitzen. Zeichnen wir die ersten Glieder im Zahlenstrahl ein, so erkennen wir, dass sich diese um zwei Punkte sammeln Die beiden Häufungspunkte von , .



Zahlenstrahl mit eingezeichneten Gliedern von

## Die Bernoulli Ungleichung

Für alle und gilt:

**Induktionsbeweis:**

* **Induktionsanfang:**
* **Induktionshypothese**
* **Induktionsschritt**

## Das Cauchy-Kriterium

Das Cauchy-Kriterium kann genutzt werden, um festzustellen, ob eine Folge konvergiert, ohne ihren Grenzwert zu kennen. Es lautet wie folgt:

ist konvergent, genau dann, wenn ein existiert, so dass

**Beweis:**

(): konvergiere mit Grenzwert . Dann gibt es mit Sicherheit zu jedem ein , so dass alle Glieder eine Abweichung zu haben, welche kleiner ist als . Also ein , so dass . Daraus folgt nun:

(): Sei eine Folge, für die ein existiert, so dass . Es gibt also auf jeden Fall ein , so dass und damit folgt . Damit existiert mit in jedem Fall eine Schranke.

Nach dem Satz von Weierstrass besitzt demzufolge eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert . Sei gegeben. Wir wählen dazu ein mit für , sowie ein mit . Für folgt und damit ist konvergent.

## Limes superior/inferior

Sei eine Folge reeller Zahlen. Dann ist der Limes superior definiert als

und der Limes inferior als

Jede beschränkte Folge lässt die Glieder von zwei monotonen Folgen definieren.

Überlegen wir uns deren Bedeutung. Sei das -te Glied von . Bei handelt es sich um das kleinste Glied welches nach in der Folge erscheint; bei um das grösste Glied welches nach in der Folge erscheint. Bilden wir nun für jedes Glied in ein dazugehöriges und , so erhalten wir mit dem grössten aller den und mit dem kleinsten aller den .

Damit ist der der kleinste Häufungspunkt von und der der grösste Häufungspunkt von .

Ist , so ist monoton.

**Beweis:**

Nach der Definition von und ist die Aussage äquivalent dazu, dass genau einen Häufungspunkt besitzt. Nach Weierstrass ist dann monoton.

## Abgeschlossene Intervalle

Ein abgeschlossenes Intervall ist eine Teilmenge der Form

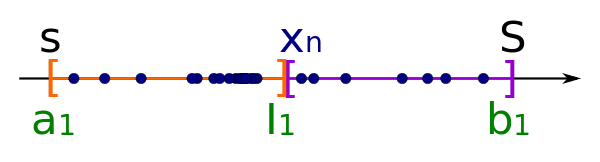
Wir definieren die Länge eines abgeschlossenen Intervalls wie folgt:

## Bolzano-Weierstrass

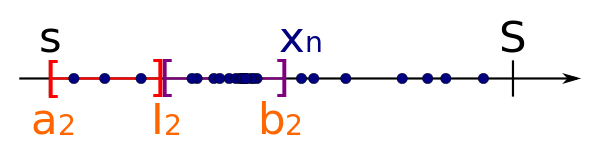
Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge

**Beweis:**

Sei eine beschränkte Folge. Wir wissen, dass es ein und ein gibt, so dass alle Folgeglieder in liegen. Wir definieren nun . Teilen wir in zwei gleich grosse Teilintervalle , so müssen in zumindest einem dieser beiden Intervalle unendlich viele Folgeglieder von liegen. Dieses Intervall definieren wir nun als .



Jetzt können wir wiederum in zwei gleich grosse Teilintervalle aufteilen und als dasjenige Teilintervall definieren, welches unendlich viele Folgeglieder enthält.



Dieses Verfahren wiederholen wir beliebig oft, so dass wir am Ende eine Intervallschachtelung erhalten. Man beachte: Induktiv gilt und damit konvergiert die Länge der Intervalle gegen 0. Es gibt also nach dem Intervallschachtelungsprinzip genau einen Punkt , der in allen Intervallen liegt. Dieser Punkt entspricht dem Grenzwert einer Teilfolge von .

## Abzählbarkeit von

Wir können durch Konstruktion von Intervallen in zeigen, dass die Reellen Zahlen überabzählbar sind.

ist überabzählbar und damit mit Sicherheit auch selbst.

**Beweis:**

Sei eine Bijektion. Wir bilden induktiv eine monoton fallende Folge abgeschlossener Intervalle in mit , dann folgt: .

Konstruktion von :

Sei , dann wählen wir als dasjenige Intervall aus , das nicht enthält. Sei nun mit und induktiv definiert als dasjenige Intervall aus welches nicht enthält, so folgt:

# Reihen

Gegeben sei eine Folge . Durch:

wird der Folge eine weitere Folge zugeordnet. Diese Folge nennen wir Reihe und sagen:

* sind die Glieder der Reihe
* sind die Partialsummen der Reihe

## Reihenkonvergenz

Konvergiert die Folge der Partialsummen einer Reihe, so heisst diese Reihe konvergent. Man sagt dann, sei die Summe der konvergenten Reihe und schreibt: .

Weiter definieren wir für divergierende Reihen: für positive Divergenz und für negative Divergenz.

### Leibniz-Kriterium

Sei eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die Reihe .

**Beweis:**

Wegen der fallenden Monotonie der Folge folgt aus , dass .

### Cauchy-Kriterium für Reihen

Die Reihe konvergiert .

**Beweis:**

Wir wissen, dass eine Reihe konvergiert, sofern derer Partialsummen konvergieren. Aufgrund Das Cauchy-Kriteriums folgt aus direkt die Konvergenz von .

### Majoranten- und Minoranten-Kriterium

Das Majoranten-Kriterium formuliert sich wie folgt:

Es seien und Reihen, für die so dass . Es gilt dann:

1. Konvergiert , so konvergiert auch .
2. Divergiert , so divergiert auch .

Für das Minoranten-Kriterium sagen wir:

Es seien und Reihen, für die so dass . Es gilt dann:

1. Konvergiert , so konvergiert auch .
2. Divergiert , so divergiert auch .

**Beweis:**

Wir beweisen hier lediglich das Majoranten-Kriterium und verzichten auf das Minoranten-Kriterium – Die Beweisschritte laufen analog und sind ohnehin nahezu identisch.

1. Nach Cauchy gibt es für jedes ein , so dass . Damit folgt für die selben . Auch erfüllt also die Cauchysche Konvergenzbedingung.
2. Sei divergent so gilt: . Damit folgt für die selben . Auch erfüllt also die Cauchysche Konvergenzbedingung nicht.

### Quotientenkriterium

Es sei eine Reihe mit für fast alle . Ferner existiere .

1. Ist , so konvergiert die Reihe absolut
2. Ist , so divergiert die Reihe absolut
3. Ist , so liefert keinen Aufschluss über konvergenzverhalten.

Beweis:

1. Sei . Wir wählen nun , so dass für . (Wegen muss nach unserer Behauptung ein solches existieren). Es gilt also . Insgesamt erhält man so . Mit dem Majoranten-Kriterium kann man dann feststellen, dass konvergiert und damit konvergiert absolut. (Konstruktion nicht vorlesungsrelevant!)
2. Aus folgt, dass . Damit ist für alle eine Streng monoton wachsende Folge und damit mit Sicherheit keine Nullfolge.

### Wurzelkriterium

Es sei . Für gilt dann:

1. Ist so konvergiert die Reihe
2. Ist so divergiert die Reihe
3. Ist so liefert keinen Aufschluss über konvergenzverhalten

**Beweis:**

1. Sei eine Zahl mit , dann gibt es einen Index , so dass . Die Reihe hat also in eine konvergente Majorante (Siehe Majoranten-Kriterium) und ist damit konvergent.
2. Sei so gibt es unendlich viele mit (d.h. ). Damit bilden die Glieder der Reihe keine Nullfolge.

## Potenzreihen

Eine Potenzreihe ist eine unendliche Reihe der Form

### Konvergenz

Sei eine Folge (in oder ). Falls konvergiert, so definieren wir:

Die Potenzreihe konvergiert für alle und divergiert für alle .

**Beweis:**

Sei . Dann ist

## Doppelreihen

Gegeben sei eine Doppelfolge . Wir nennen eine Doppelreihe. Weiter sei eine lineare Anordnung der Doppelreihe falls es eine Bijektion gibt, mit .

Wir nehmen an, dass es ein gibt, so dass . Dann konvergieren die Folgenden Reihen absolut:

Und es gilt: . Zudem konvergiert jede lineare Anordnung der Doppelreihe absolut mit selbem Grenzwert.

### Cauchy-Produkt der Reihen

Das Cauchy Produkt der Reihen und ist die Reihe

# Reellwertige Funktionen

Wir definieren: ist die Menge aller Funktionen und bildet einen Vektorraum.

## Beschränktheit

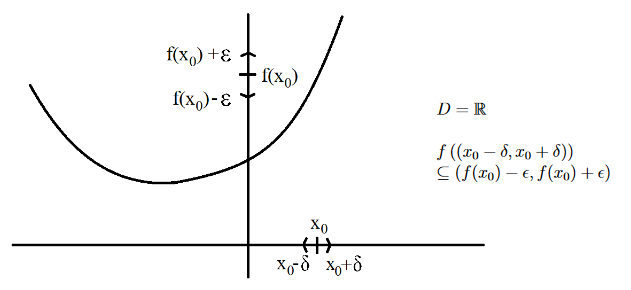
Eine Funktion mit , ist:

* Monoton wachsend, falls
* Streng monoton wachsend falls
* Monoton fallend, falls
* Streng monoton fallend, falls
* Monoton, falls monoton wachsend oder monoton fallend ist.
* Streng monoton, falls streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

## Stetige Funktionen

Eine Funktion ist stetig, wenn man deren Funktionsgraphen zeichnen kann, ohne den Stift zu heben. Das heisst, wenn Sie in jedem Punkt von stetig ist.

Sei . Die Funktion ist in stetig falls es für jedes ein gibt, so dass für alle die Implikation gilt.



Sei . Die Funktion ist in stetig falls für jede Folge in die folgende Implikation gilt:

**Beweis:**

Sei eine Folge in mit . Sei weiter und so, dass :

Sei nun so, dass

Und daher:

Beweis durch Gegenbeispiel: ist in nicht stetig. Es gibt also so dass

Insbesondere gibt es für jedes (mit ) ein

Mit

Damit entsteht eine Folge in mit

Und

## Polynomialfunktion

Sei eine Funktion der Form mit . Wir nennen eine polynomiale Funktion und sagen:

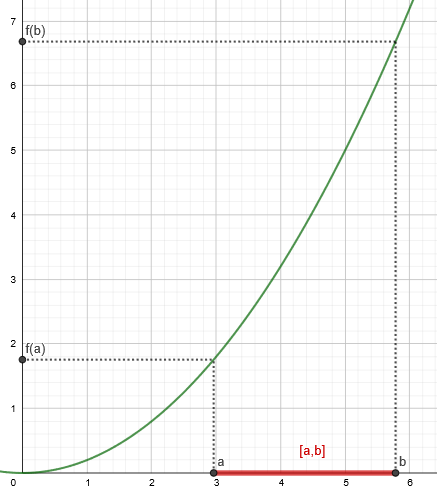
* ist konstant, falls
* ist von Grad , falls

Eine wichtige Eigenschaft von Polynomialfunktionen ist, dass diese auf ganz stetig sind. Das bedeutet auch, dass diese in jedem Punkt integrierbar sind. **(Siehe Korollar )**

## Zwischenwertsatz

Sei ein Intervall, eine stetige Funktion und . Für jedes zwischen und gibt es ein zwischen und mit .

Im Grunde sagt der Zwischenwertsatz aus, dass eine reelle Funktion , die auf einem abgeschlossenen Intervall stetig ist, jeden Wert zwischen und annimmt.



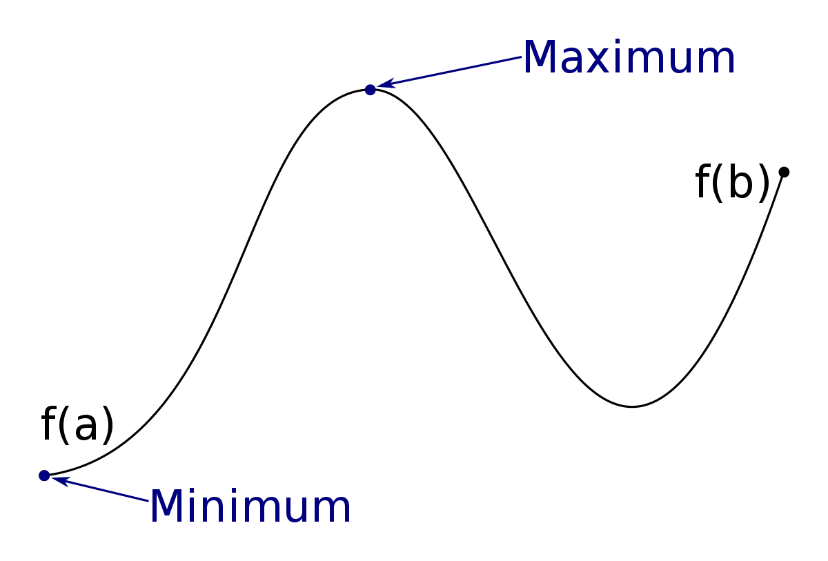
Beispiel Zwischenwertsatz: Jeder Wert in wird von abgedeckt

## Min-Max Satz

Sei stetig auf einem kompakten Intervall . Dann gibt es mit

Insbesondere ist damit beschränkt.

Der Min-Max Satz sagt aus, dass jede auf einem kompakten reellen Intervall definierte, reelwertige und stetige Funktion beschränkt ist und im Definitionsbereich ihr Maximum sowie Minimum annimmt.



Beispiel Max-Min Satz: nimmt ihr Maximum/Minimum in an.

## Der Satz über die Umkehrabbildung

Seien . Ferner definieren wir und . Falls in und in stetig sind, so ist

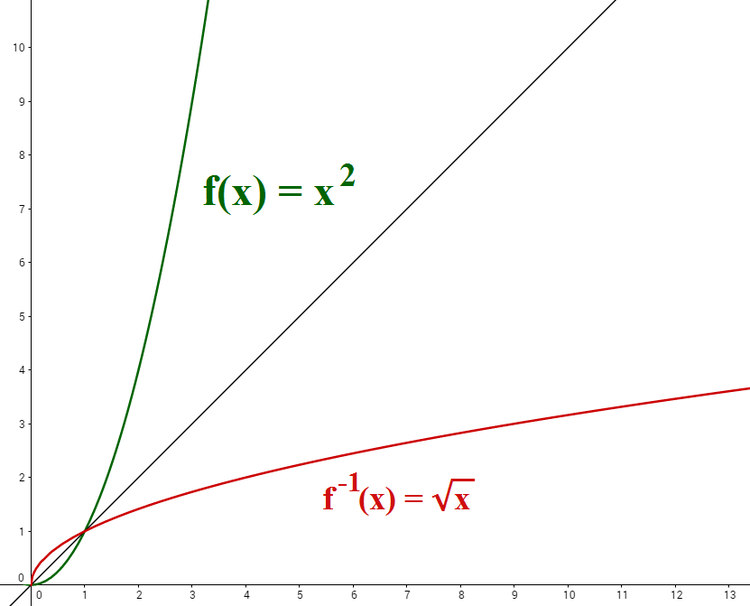
In stetig.

**Beweis:**

Sei eine Folge in mit . Da stetig in ist, folgt daraus . Und da in stetig ist, folgt woraus die Stetigkeit von in folgt.

Sei nun ein beliebiges Intervall in den reellen Zahlen und eine stetige und streng monotone Folge. Dann ist ebenfalls ein Intervall in den reellen Zahlen und stetig und streng monoton.

Etwas informeller bedeutet das: Sei eine Funktion und , so gilt in jedem Fall: .

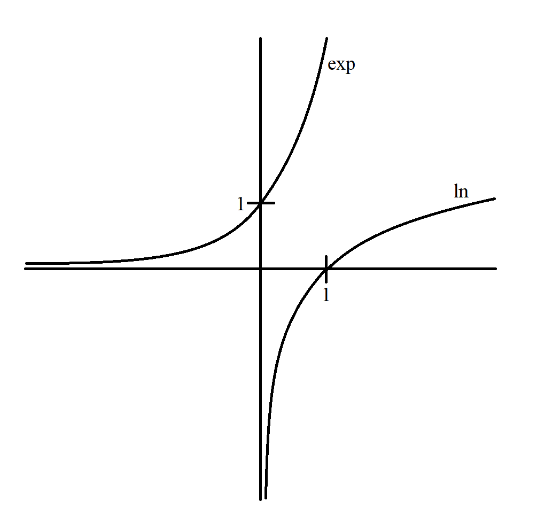


Beispiel zu einer Umkehrfunktion

## Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion ist definiert durch eine in ganz absolut konvergente Potenzreihe

Ausserdem gilt für , dass streng monoton wachsend, stetig und surjektiv ist.



Die Exponentialfunktion und ihre Umkehrfunktion, der Logarithmus zu Basis .

Die Exponentialfunktion liefert einige Rechenregeln, welche sich besonders für Funktionsanalysen als nützlich erweisen:

## Konvergenz von Funktionenfolgen

Sei eine Menge. Analog zur Definition einer Folge reeller Zahlen ist eine (reellwertige) Funktionenfolge einer Abbildung

Wie im Fall der Folgen bezeichnen wir mit und die Funktionenfolge mit . Für jedes erhält man eine Folge in .

Die Funktionenfolge konvergiert punktweise gegen eine Funktion , falls für alle gilt:

Nach Weierstrass gilt: Die Folge

Konvergiert gleichmässig in gegen

Falls gilt: , so dass:

# Eulers und die Trigonometrischen Funktionen

## Definition der Exponentialfunktion

Sowohl in der Natur als auch in der Wirtschaft treten häufig Wachstums- oder Abnahmeprozesse auf, bei denen sich alle Teile eines Bestandes unabhängig voneinander zu allen Zeiten nach demselben Gesetz entwickeln. Beispiele sind der radioaktive Zerfall oder die Zunahme eines Kapitals durch Verzinsung. Bei Prozessen mit einer solchen Eigenschaft spricht man von natürlichem Wachstum. Wir bestimmen und untersuchen nun die Funktionen , die ein solches Wachstum beschreiben.

Aus der Natur unseres Problems lassen sich direkt zwei zentrale Eigenschaften aller Funktionen ableiten, welche in jedem Fall zutreffen müssen:

1. , denn zu Beginn einer Messung beträgt der Faktor eines Bestandes logischerweise stets 1.
2. , denn haben wir nach Zeit einen bestimmen Bestand zu Faktor und nach Zeit einen bestimmten Bestand zu Faktor , so beträgt der Wachstumsfaktor des Bestandes nach Zeit natürlich = .  
    **Diese Eigenschaft bezeichnen wir auch als Funktionalgleichung des natürlichen Wachstums.**

Was nun direkt auffällt, ist dass jede mögliche Funktion direkt durch die Steigung im Punkt festgelegt wird. Das lässt auch sich ganz logisch an einem Bespiel erkennen, denn die Wachstumsrate zu Beginn eines Quartals beeinflusst ja ganz klar das Wachstum des ganzen Quartals. Nennen wir nun diese für uns wichtige Steigung , so gilt offensichtlich

Es sei nun eine beliebige komplexe Zahl und . Wir bestimmen nun alle Funktionen mit den Eigenschaften

Nach gilt mit jeder natürlichen Zahl

Es sein nun eine komplexe Zahlenfolge, so dass . Es gilt

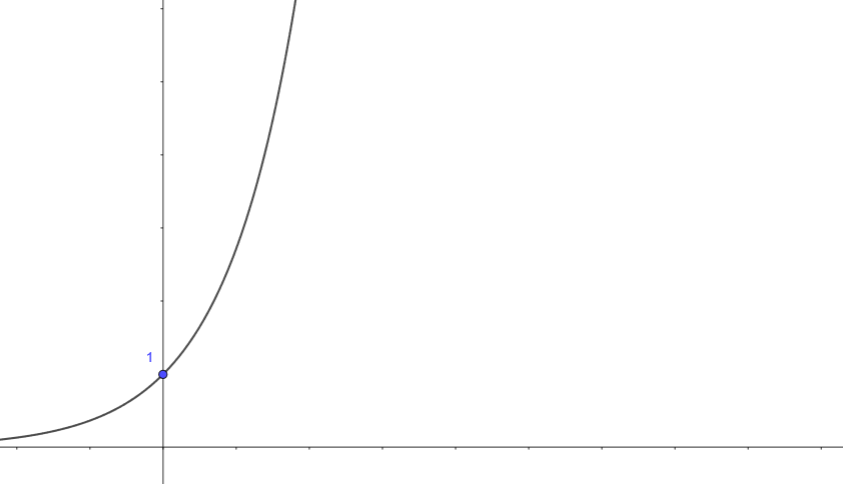
Wir wissen nicht genau wie aussieht, können aber durch folgendes schlussfolgern

Wir nutzen nun folgendes Lemma zur Vereinfachung unseres .

Für jede Folge mit dem Grenzwert gilt:

Damit erhalten wir

Man beachte, dass wir von Anfang an davon ausgegangen sind, dass unsere Funktion direkt von abhängt. Wir können diese Eigenschaft beibehalten, indem wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass . Damit haben wir eine geeignete Wachstumsfunktion für unseren natürlichen Wachstum gefunden; die berühmte Exponentialfunktion.



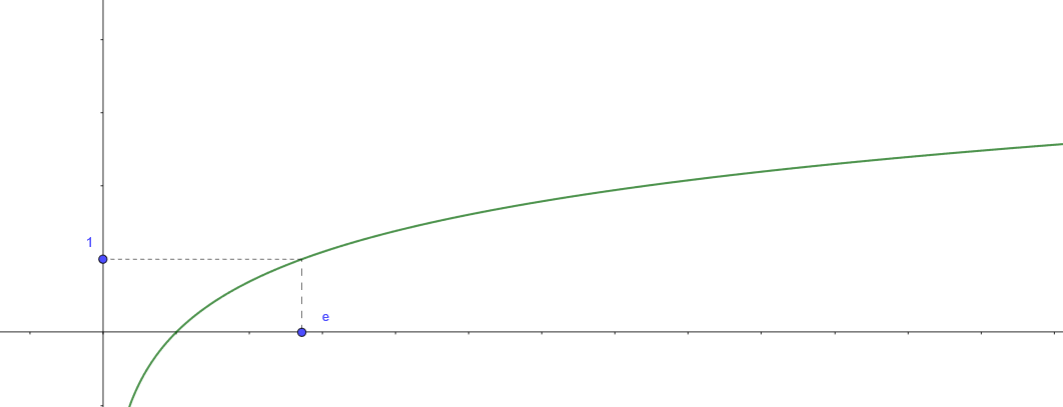
Funktionsgraph von

## Der natürliche Logarithmus

Die Exponentialfunktion bildet bijektiv auf ab. Die dazugehörige Umkehrfunktion

heisst natürlicher Logarithmus. Definitionsgemäss gilt also

Der natürliche Logarithmus hat als Wertevorrat ganz . Er ist also weder nach oben noch nach unten beschränkt. Ferner ist er wie die Exponentialfunktion stetig und streng monoton wachsend.



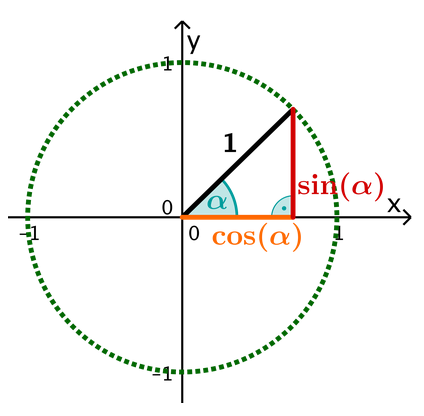
Funktionsgraph von

## Die Trigonometrischen Funktionen

Mit Hilfe der Exponentialfunktion erzeugen wir jetzt die trigonometrischen Funktionen. Wir betrachten dazu die Exponentialfunktion auf der imaginären Achse. Es sei . Dann hat den Betrag 1, da

Die Zahl liegt also auf dem Einheitskreis. Ihr Realteil heisst Cosinus von und ihr Imaginärteil Sinus von . Damit gilt

Ferner besagt dass



Einheitskreis

Wir erweitern nun die Definitionen: Für beliebiges setzten wir

Für die Potenzreihendarstellung vom und erhalten wir

## Die Kreiszahl

Aus der Definition des folgt . Damit wissen wir sicherlich, dass die Sinusfunktion auf dem Intervall mindestens eine Nullstelle hat. Tatsächlich finden sich jedoch unendlich viele Nullstellen von in (die Funktion alterniert ja stetig zwischen ). Wir nennen die kleinste dieser Nullstelle .

Sei die Sinusfunktion. Wir definieren

ist die kleinste positive reelle Zahl mit

# Differenzialrechnung

Die von Leibniz und Newton begründete Differential- und Integralrechnung bildet den Kern der Analysis. Leibniz entwickelte sie zur Behandlung des sogenannten Tangentenproblems, Newton anlässlich seiner Studien zur Mechanik. Wir behandeln zunächst Grundzüge der Differentialrechnung. Dabei beschränken wir uns auf Funktionen mit dem Definitionsbereich , da zur Untersuchung differenzierbarer Funktionen einer komplexen Veränderlichen besondere Methoden geboten sind. Wir lassen aber weiterhin komplexwertige Funktionen zu.

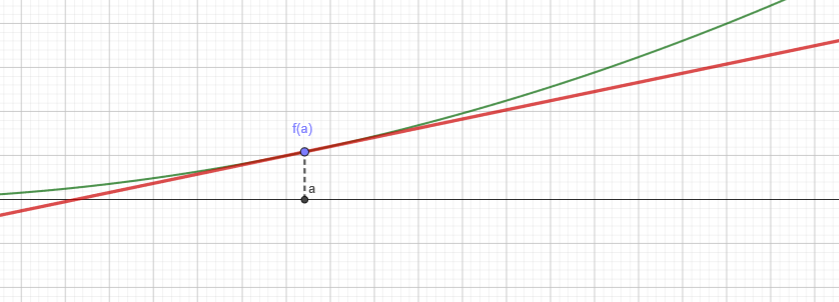
## Ableitung

Sei , und ein Häufungspunkt von . ist in differenzierbar, falls der Grenzwert

Existiert. Ist dies der Fall, wird der Grenzwert mit oder bezeichnet.

Bei Betrachtung einer beliebigen, im Intervall stetigen Funktion fällt schnell auf, dass der Steigung der Sekante durch und entspricht. Lässt man nun nach streben, so verkürzt sich diese Sekante bis sie irgendwann als Tangente an die Steigung in beschreibt.

Es gilt: wird das Differenzial oder die Ableitung von genannt.

Wir approximieren zu und erhalten so die Steigung in .

**Beispiel:** Ist bei einer Bewegung der zurückgelegte Weg als Funktion der Zeit gegeben, so definiert die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall und die Ableitung die momentane Geschwindigkeit im Zeitpunkt .

Sei , Häufungspunkt von . Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. ist in differenzierbar
2. Es gibt und mit:
   1. und ist stetig in

Falls dies zutrifft ist eindeutig bestimmt.

ist genau dann in differenzierbar, falls es eine Funktion gibt die stetig in ist so, dass

In diesem Fall gilt .

**Beweis:** Sei differenzierbar in . Wir wissen nun, dass dann

Sei nun

So erhalten wir

Ausserdem gilt

Sei , ein Häufungspunkt von und in differenzierbar. Dann gilt:

1. ist in differenzierbar und
2. ist in differenzierbar und
3. Falls ist in differenzierbar und

**Beweis zu 1 und 2:** Seien stetig in mit

Dann folgt

Da in stetig ist folgt, dass in differenzierbar ist und

Das Produkt der Identitäten und ergibt:

Sei

Dann ist stetig in , folglich gilt:

## Ableitungsregeln

### Produktregel

Seien und in differenzierbar. Dann gilt:

**Beweis:** Wir nutzen eine schlaue Erweiterung des Terms mit 0, um eine günstige Form zu erhalten, welche uns eine Vereinfachung des Ausdrucks erlaubt.

### Kettenregel

Seien und in differenzierbar. Dann gilt:

**Beweis:** Für diesen Beweis definieren wir und nutzen einen interessanten Trick um den Term über Erweiterung mit Faktor und Substitution mit zu vereinfachen.

### Kehrwertregel

Sei in differenzierbar. Dann gilt:

**Beweis:** Die Kehrwertregel lässt sich aus der Kettenregel herleiten. Hierfür betrachten wir die abzuleitende Funktion als Verknüpfung von zwei anderen Funktionen. Wir definieren:

Damit gilt:

### Quotientenregel

Seien und in differenzierbar. Dann gilt:

**Beweis:** Wir schreiben den Bruch als zwei Faktoren, um die Produktregel anwenden zu können. Mithilfe der Kehrwertregel können wir dann zum gewünschten Term vereinfachen.

### Winkelfunktionen

**Beweis zu 1:** Wir wollen im Folgenden die erste Behauptung beweisen. Die anderen beiden Beweise verlaufen nahezu analog.

Es sei eine in differenzierbare Funktion mit . Es gilt:

## Zentrale Sätze über die erste Ableitung

Sei und .

1. besitzt ein lokales Maximum in falls es gibt mit:
2. besitzt ein lokales Minimum in falls es gibt mit:
3. besitzt ein lokales Extremum in falls es entweder ein lokales Minimum oder Maximum von ist.

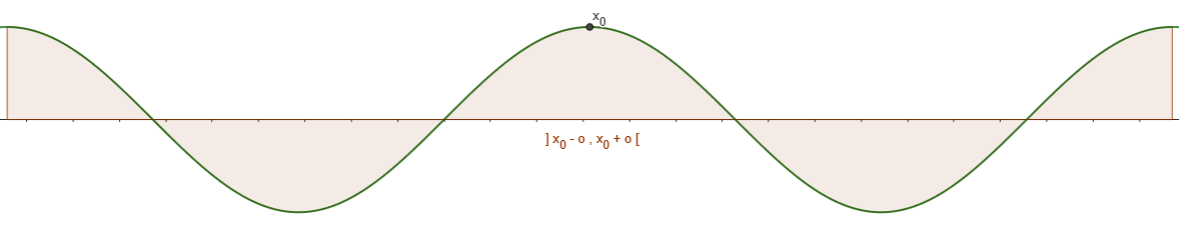
Ein Bild, das Himmel, Objekt, Kleiderbügel, hängend enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

sind lokale Maxima und sind lokale Minima

Betrachten wir kurz was die vorangegangenen Sätze praktisch bedeuten:

Sagt uns, dass alle Funktionswerte unmittelbar um ein lokales Maximum kleiner sind als der Funktionswert an eben diesem Maximum.



Sagt uns, dass alle Funktionswerte unmittelbar um ein lokales Minimum grösser sind als der Funktionswert an eben diesem Minimum

Ein Bild, das Objekt enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Definiert allgemein das lokale Extremum als lokales Minimum oder Maximum von

Sei . Wir nehmen an, ist in differenzierbar.

1. Falls gibt es mit
2. Falls gibt es mit
3. Falls in ein lokales Extremum besitzt, folgt

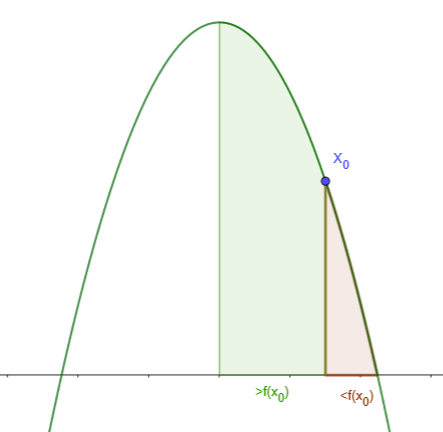
Betrachten wir auch hier kurz was die vorangegangenen Sätze praktisch bedeuten:

Ist die Ableitung an positiv (also ist die Funktionssteigung an positiv), so sind alle Funktionswerte unmittelbar nach grösser als und alle Funktionswerte unmittelbar vor kleiner als .

Ein Bild, das Objekt enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Ist die Ableitung an negativ (also ist die Funktionssteigung an negativ), so sind alle Funktionswerte unmittelbar nach kleiner als und alle Funktionswerte unmittelbar vor grösser als .



Bedeutet, dass die Ableitung eines Extremums immer ergibt; an einer lokalen Extremstelle also keine Steigung herrscht.

### Regel von Bernoulli – De l’Hospital

Mit der Regel von de l’Hospital lassen sich Grenzwerte von Funktionen, die sich als Quotient zweier gegen Null konvergierender oder bestimmt divergierender Funktionen schreiben lassen, mithilfe der ersten Ableitung dieser Funktionen berechnen.

Seien und differenzierbar nahe mit überall, so dass die Grenzwerte und entweder beide gleich oder beide gleich sind. Dann gilt

Falls die rechte Seite im eigentlichen oder uneigentlichen Sinn existiert. Dasselbe gilt für einseitige Grenzwerte und für .

**Beispiel:**

Wir wollen den berechnen. Dazu Prüfen wir als erstes, ob wir die Regel von De l’Hospital anwenden dürfen.

Damit ist De L’Hospital anwendbar und es gilt:

### Satz von Rolle

Sei stetig und auf differenzierbar. Erfüllt sie so gibt es mit

**Beweis:**

Aus dem Min-Max Theorem folgt, dass es in gibt mit

Falls eines der beiden in liegt, nennen wir es . Dann hat in ein lokales Extremum und dann folgt, dass und der Satz ist bewiesen. Falls aber folgt und somit ist konstant, insbesondere folgt

### Formel von Lagrange

Sei stetig mit auf differenzierbar. Dann gibt es mit

**Beweis:**

Wir betrachten die Punkte und . Schnell lässt sich errechnen, wir suchen nun die Geradengleichung durch diese zwei Punkte und finden sie mit

Definieren wir nun . Die Differenz zweier differenzierbarer und stetiger Funktionen ist ebenfalls stetig und auf dem gleichen Intervall differenzierbar. Ausserdem folgt aus unserer Konstruktion unmittelbar

Damit erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Rolle. Es gibt also mit

Als Konsequenz folgt direkt

## Höhere Ableitungen

Für ist -mal differenzierbar in falls in differenzierbar ist bzw. -mal stetig differenzierbar in ist. Dann ist und nennt sich die -te Ableitung von . Die Funktion ist in glatt, falls sie -mal differenzierbar ist.

## Potenzreihen und Tayler Approximation